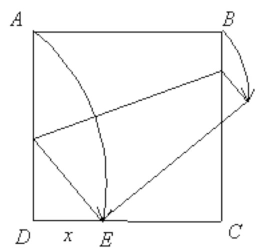
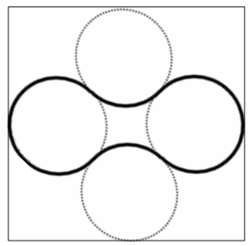
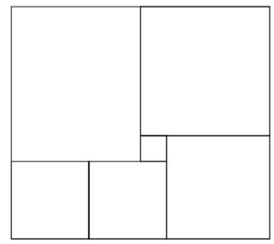
# Ángulos, Áreas, Perímetros y Pitágoras

1. Demuestra que la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono siempre es 360°.

2. Un cuadrado de papel $ABCD$ se dobla de modo que el vértice $A$ toque en un punto arbitrario $E$ del lado $CD$. Así, se obtienen tres triángulos rectángulos que son donde no se traslapa el papel. Determinar la longitud de sus lados en función de $x = DE$. Deduce que el perímetro del triángulo mayor es la suma de los perímetros de los otros dos y vale la mitad que el perímetro del cuadrado.



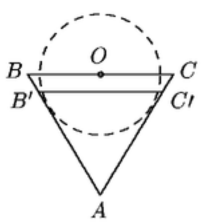



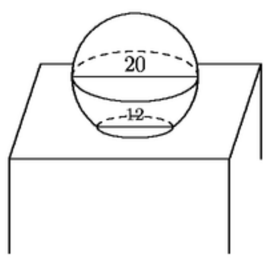
3. En la figura de enmedio se muestra una servilleta cuadrada de 10x10 cm en la cual se han dibujado 4 círculos de manera que cada círculo es tangente a otros dos y a un lado de la servilleta. Calcula la longitud del segmento remarcado.

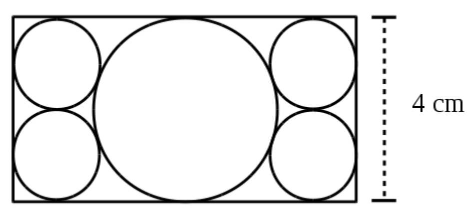
4. La tercer figura que se muestra arriba es un rectángulo formado por 6 cuadrados. Si el cuadrito más chiquito es de $1 \times 1$. ¿Cuál es el área del rectángulo?

5. Se considera una circunferencia de centro $O$ y se traza un diámetro $AD$. El punto $C$ de la circunferencia es tal que $\angle CAD = 36°$. Se traza por $O$ la recta perpendicular a la cuerda $AC$ que corta a la circunferencia en el punto $B$. Sea $E$ el punto de intersección de $AC$ y $BD$. Calcular la medida del ángulo $\angle CED$.

6. Un barquillo de helado en Planilandia está formado por un triángulo equilátero $ABC$ (el barquillo) y un círculo de radio 1 (la bola de nieve) tangente a $AB$ y $AC$. El centro del círculo $O$ está en $BC$. Como hace mucho calor, se derrite completamete el helado y formando así el triángulo $AB'C'$ con el helado líquido. El triángulo $AB'C'$ tiene la misma área que el círculo de helado original y es tal que $BC$ y $B'C'$ son paralelas. ¿Cuál es la altura del triángulo $AB'C'$?








7. Una mesa tiene un agujero circular con un diámetro de 12 cm, como se muestra en la figura de arriba en el centro. Sobre el agujero hay una esfera de diámetro 20 cm. Si la mesa tiene 30 cm de altura, ¿cuál es la distancia en centímetros desde el punto más alto de la esfera hasta el piso?

8. En la tercer figura, los cuatro círculos pequeños son iguales entre sí y son tangentes al círculo mayor y al rectángulo. Si uno de los lados del rectángulo mide 4 cm. ¿ Cuánto mide el otro lado?

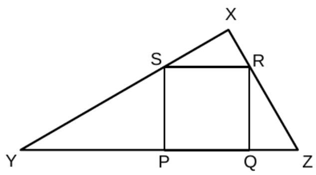
9. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia inscrita a un triángulo de lados 3, 4 y 5?

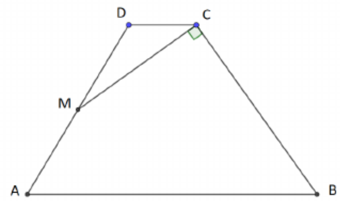
10. Sea $ABC$ un triángulo equilátero de lado 21 y sea $D$ un punto sobre el segmento $BC$ tal que $BD = 5$. ¿Cuánto mide $AD$?

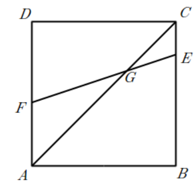
11. Sea $ABC$ un triángulo isósceles con $AB = BC = 1$ y $\angle ABC = 150°$. ¿Cuánto mide $AC$?

# Congruencia y Semejanza

1. En la figura, $XYZ$ es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 cm. ¿Cuánto miden los lados del cuadrado $PQRS$?




2. En la figura de enmedio se muestra al trapecio $ABCD$ de bases $AB$ y $CD$, sea $M$ el punto medio del lado $DA$. Si el segmento $BC$ mide 6 cm, el segmento $MC$ mide 4 cm y el ángulo $\angle MCB$ mide 90°, ¿cuál es el área del trapecio $ABCD$?

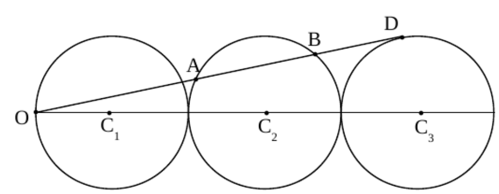
3. En la tercer figura, $ABCD$ es un cuadrado de lado 10 cm. Los puntos $E$ y $F$ sobre los lados $BC$ y $AD$ son tales que $CE = 1$ cm y $FA = 4$ cm; $G$ es el punto de intersección del segmento $FE$ con la diagonal $AC$. ¿Cuál es el área, en cm$^2$ del cuadrilátero $FGCD$?

4. Sobre los lados $AB$ y $AC$ de un triángulo cualquiera $ABC$ se construyen hacia afuera dos triángulos equiláteros $PAB$ y $QAC$. Demuestra que $PC = QB$.

5. Recuerda que un *paralelogramo* es un cuadrilátero que tiene sus pares de lados opuestos paralelos. Muestra que:
a) En un paralelogramo los lados opuestos son iguales y que las diagonales se cortan por sus puntos medios.
b) Si dos segmentos son iguales y paralelos, entonces sus extremos forman un paralelogramo.
c) Si dos segmentos se cortan por su punto medio, entonces sus extremos forman un paralelogramo.

6. Demuestra que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera forman un paralelogramo.

7. Las tres circunferencias de la figura tienen el mismo radio $r = 5$cm y sus centros caen sobre la misma recta. La circunferencia de en medio es tangente a las otras dos. Desde el punto $O$ se traza una tangente a la circunferencia de centro $C_3$. Halla la longitud del segmento $AB$ interceptado por la circunferencia central.




8. *Potencia de un punto a una circunferencia.* Considera una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio $r$ y centro $O$, y cuatro puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ sobre ella de manera que $AC$ y $BD$ se intersectan en el interior de $\mathcal{C}$ en un punto $E$ y las prolongaciones de $AB$ y $CD$ se intersectan en un punto $F$ exterior a $\mathcal{C}$. Sea $T$ un punto sobre $\mathcal{C}$ tal que $FT$ es tangente a $\mathcal{C}$. Demuestra que

   *a*) $EB \cdot ED = EA \cdot EC = r^2 - EO^2$.
   *b*) $FA \cdot FB = FD \cdot FC = FT^2 = FO^2 - r^2$.

9. Considera un trapecio cuyas bases miden $a$ y $b$. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos en función de $a$ y $b$. Además demuestra que este segmento es paralelo a las bases y que también pasa por el punto medio de las diagonales.

10. *Teorema de la bisectriz.* Sea $ABC$ un triángulo y $D$ un punto sobre $AC$ de manera que $AD$ es bisectriz del ángulo $\angle BAC$. Prueba que
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$
Sugerencia: Traza la paralela a $AD$ por $C$.

11. Demuestra que en un trapecio los puntos medios de las bases, el punto de intersección de los lados no paralelos y el punto de intersección de las diagonales están todos alineados.

12. *Demostración del Teorema de Pitágoras usando semejanza.* Considera un triángulo rectángulo $ABC$ con ángulo recto en $C$, sea $D$ un punto sobre $AB$ tal que $CD$ es perpendicular a $AB$. Prueba que los triángulos $ABC$, $ADC$ y $CDB$ son semejantes. Usa estas semejanzas para probar que $AC^2 + CB^2 = AB^2$.

13. En un paralelogramo $ABCD$, sea $M$ el punto del lado $BC$ tal que $2MC = BM$ y sea $N$ el punto del lado $CD$ tal que $2NC = DN$. Si la distancia del punto $B$ a la recta $AM$ es 3, calcular la distancia del punto $N$ a la recta $AM$.

14. En un triángulo $ABC$, sean $D$ y $E$ puntos de los lados $BC$ y $AC$, respectivamente. Los segmentos $AD$ y $BE$ se cortan en $O$. Supongamos que el segmento que uno los puntos medios de $BC$ y $AC$ corta al segmento $DE$ por la mitad. Demostrar que el triángulo $ABO$ y el cuadrilátero $ODCE$ tienen áreas iguales.

15. En un triángulo $ABC$, rectángulo en $A$ e isósceles, sea $D$ un punto del lado $AC$ ($D \neq A$ y $D \neq C$) y sea $E$ el punto de la prolongación del lado $BA$ tal que el triángulo $ADE$ es isósceles. Si $P$ es el punto medio del segmento $BD$, $R$ es el punto medio del segmento $CE$ y $Q$ el punto en donde se cortan las rectas $ED$ y $BC$, demuestra que el cuadrilátero $ARQP$ es un cuadrado.